第8回「**PLAXIS+tij model**」セミナー
2023年10月27日, AP東京八重洲 & Zoom

陰解法によるSubloading t_{ij} modelの定式化

tij地盤解析研究会・(株)地域地盤環境研究所・中部大学
中井　照夫

Geo-*tij*

Subloading t_{ij} modelが表現できること

Nakai & Hinokio (2004) : *S&F*, 44(2)
Nakai, Shahin, Kikumoto, Kyokawa, Zhang & Farias (2011) : *S&F*, 51(6)
Nakai (2012) : *Constitutive modeling of geomaterials*

(1)**中間主応力**が変形・強度特性におよぼす影響

(2)**引張り応力の発生しない**構成モデル

→ t_{ij}の概念

(3)変形・強度特性におよぼす間隙比や拘束応力の影響
「**過圧密土**」

(4)自然堆積粘土等に見られる構造の発達した土の挙動
「**自然堆積土**」

→ 下負荷面の考え方とその拡張(密度とボンディングを考慮)

(5)**ひずみ増分方向**におよぼす応力増分方向の影響

→ パラメータを増やさず塑性ひずみ増分の分割

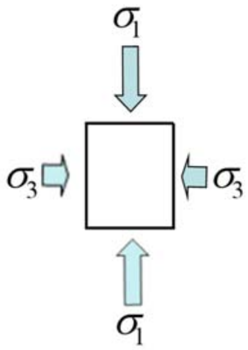
---

(6)**時間効果特性**すなわちレオロジー特性

→ 正規圧密線(NCL)のシフトと下負荷面

モデルはこれらの特性を唯一的な材料パラメータで説明できる。

2次元状態での応力の不変量

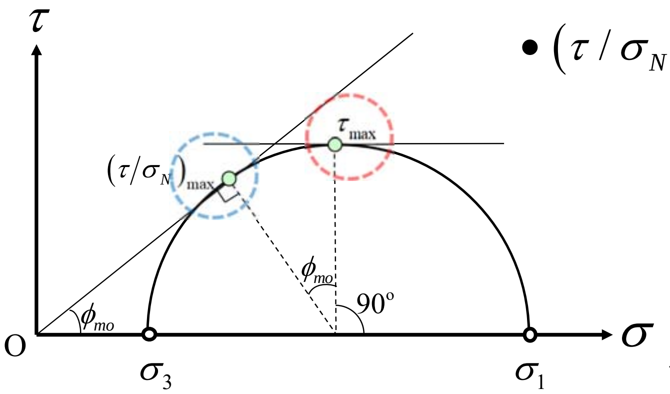


- $\tau_{\max}$面上での応力および応力比:

$$\sigma_{45^\circ} = s = \frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}$$

$$\tau_{45^\circ} = t = \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}$$

$$\frac{\tau_{45^\circ}}{\sigma_{45^\circ}} = \frac{t}{s} = \sin\phi_{mo} = \frac{\sigma_1-\sigma_3}{\sigma_1+\sigma_3}$$



- $(\tau/\sigma_N)_{\max}$ 面上での応力および応力比:

$$\sigma_N = \frac{2\sigma_1\sigma_3}{\sigma_1+\sigma_3}$$

$$\tau = \frac{(\sigma_1-\sigma_3)\sqrt{\sigma_1\sigma_3}}{\sigma_1+\sigma_3}$$

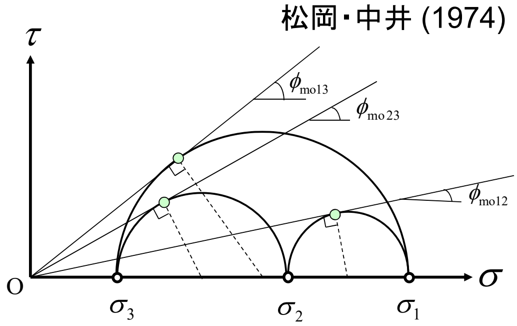
$$\frac{\tau}{\sigma_N} = \tan\phi_{mo} = \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2\sqrt{\sigma_1\sigma_3}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma_3}} - \sqrt{\frac{\sigma_3}{\sigma_1}}\right)$$

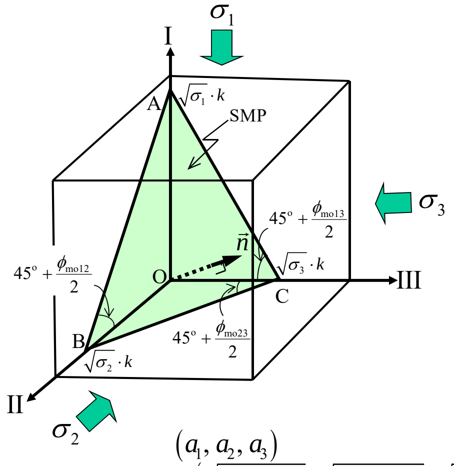
村山(1964)

Subloading t_{ij} model の概要(1)

空間滑動面 (SMP)

松岡・中井 (1974)

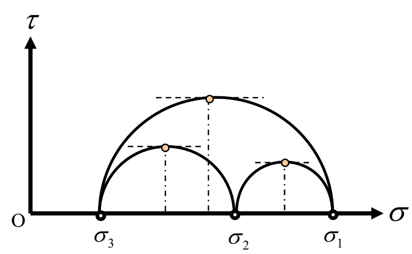


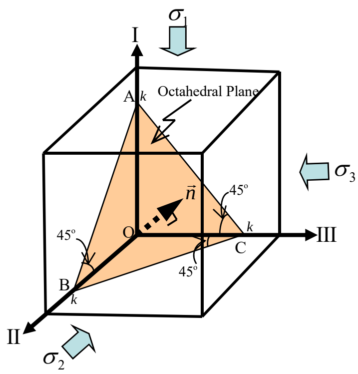


$$(a_1, a_2, a_3) = \left(\sqrt{I_3/(I_2\sigma_1)}, \sqrt{I_3/(I_2\sigma_2)}, \sqrt{I_3/(I_2\sigma_3)}\right)$$

cf. ordinary model (*e.g.* Cam clay)

正八面体面 (Oct. plane)





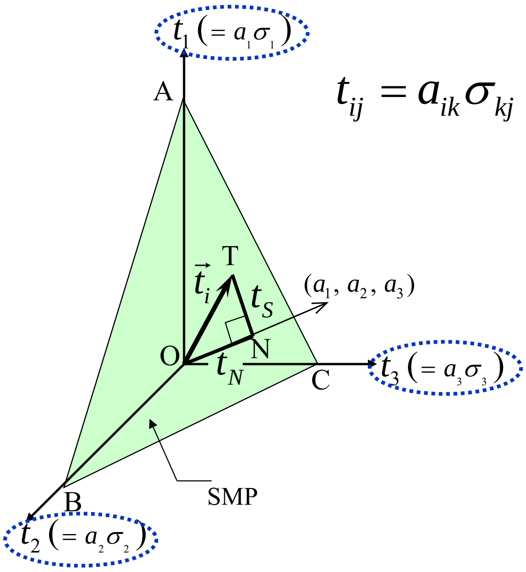
Subloading t_{ij} model の概要(2)

t_{ij} の概念に基づく応力の不変量

中井・三原(1984)

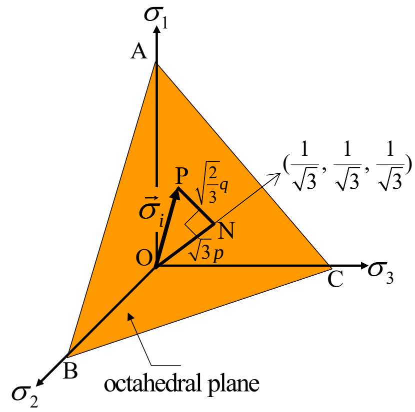
$$t_1 = a_1\sigma_1,\ t_2 = a_2\sigma_2,\ t_3 = a_3\sigma_3$$

$$t_{ij} = a_{ik}\sigma_{kj}$$



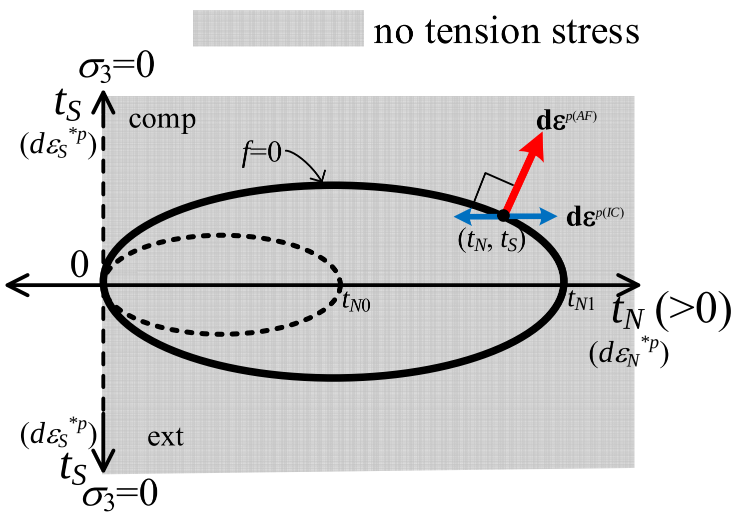
$$\begin{cases} t_N = \mathrm{ON} = t_1a_1 + t_2a_2 + t_3a_3 \\ t_S = \mathrm{NT} = \sqrt{(t_1a_2 - t_2a_1)^2 + (t_2a_3 - t_3a_2)^2 + (t_3a_1 - t_1a_3)^2} \end{cases}$$

cf. ordinary model (*e.g.* Cam clay)

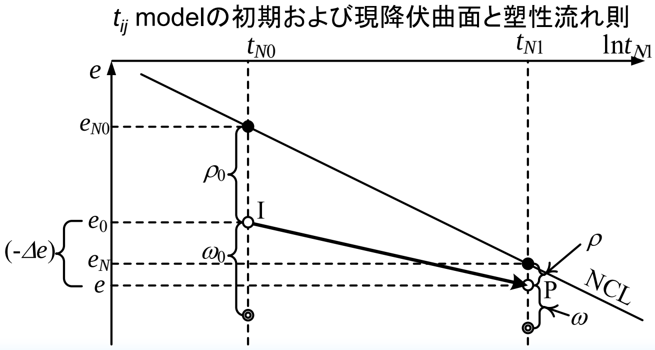


$$\begin{cases} p = \sqrt{\frac{1}{3}}\mathrm{ON} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \\ q = \sqrt{\frac{3}{2}}\mathrm{NP} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \end{cases}$$

Subloading t_{ij} model の概要(3)

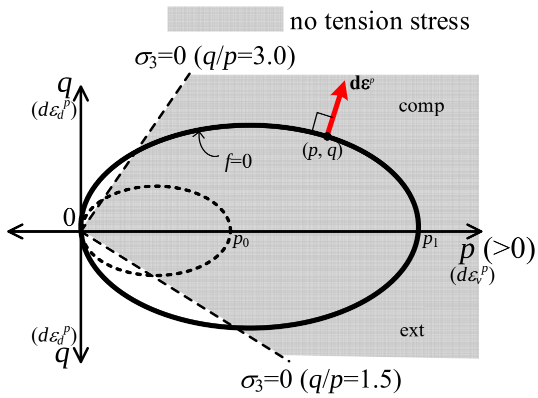


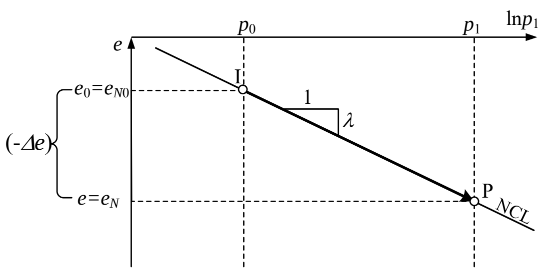
t_{ij} modelの初期および現降伏曲面と塑性流れ則



密度を表す状態変数ρの定義

cf. ordinary model (*e.g.* Cam clay)





Subloading t_{ij} model の概要(4)

降伏関数:

- $f = F - H - \dfrac{1}{\lambda-\kappa}(\rho_0 - \rho) = 0$

$$\begin{cases} F = \ln\dfrac{t_{N1}}{t_{N0}} = \ln\dfrac{t_N}{t_{N0}} + \varsigma(X) \quad \left(\text{where } X = t_S/t_N\right) \\ \varsigma(X) = \dfrac{1}{\beta}\left(\dfrac{X}{M^*}\right)^{\beta} \\ H = \dfrac{(-\Delta e)^p}{\lambda-\kappa} = \dfrac{1+e_0}{\lambda-\kappa}\varepsilon_v^p \end{cases}$$

流れ則:

- $d\varepsilon_{ij}^p = \Lambda\dfrac{\partial F}{\partial t_{ij}} - weight^{(IC)} \cdot \left(L^{(IC)}\dfrac{dt_N}{t_N}\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial t_{ij}}}{\dfrac{\partial F}{\partial t_{kk}}} - L^{(IC)}\dfrac{dt_N}{t_N}\dfrac{\delta_{ij}}{3} \right)$

硬化パラメータ (塑性体積ひずみ)の増分:

- $d\varepsilon_v^p = d\varepsilon_{kk}^p = \Lambda\dfrac{\partial F}{\partial t_{kk}}$

ρ (=e_N-e)の発展則:

- $d\rho = -(1+e_0)\sqrt{3}\dfrac{G/(1+k_aX) + Q/(1+k_bX)}{t_N}\Lambda$

$\left(\text{where} \quad G = a\rho, \quad Q = b\omega\right)$

cf. ordinary model (*e.g.* Cam clay)

- $f = F - H = 0$

$$\begin{cases} F = \ln\dfrac{p_1}{p_0} = \ln\dfrac{p}{p_0} + \varsigma(\eta) \quad \left(\text{where} \ \ \eta = q/p\right) \\ \varsigma(\eta) = \dfrac{\eta}{M} \qquad \text{(ori.)} \\ \qquad = \ln\dfrac{M^2+\eta^2}{M^2} \quad \text{(mod.)} \\ H = \dfrac{(-\Delta e)^p}{\lambda-\kappa} = \dfrac{1+e_0}{\lambda-\kappa}\varepsilon_v^p \end{cases}$$

- $d\varepsilon_{ij}^p = \Lambda\dfrac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}$

- $d\varepsilon_v^p = d\varepsilon_{kk}^p = \Lambda\dfrac{\partial F}{\partial \sigma_{kk}}$

材料パラメータ

λ	0.090 or 0.104	Same parameters as Cam clay model
κ	0.010	
N= e_{NC} at p = 98 kPa	0.83	
$R_{cs} = (\sigma_1/\sigma_3)_{cs(comp.)}$	3.5	
ν_e	0.2	
β	1.5	Shape of yield surface
a	100	Influence of density and confining pressure
k_a	8	
b	10	Influence of bonding
$Q_0 = b\omega_0$	10	
k_b	3	

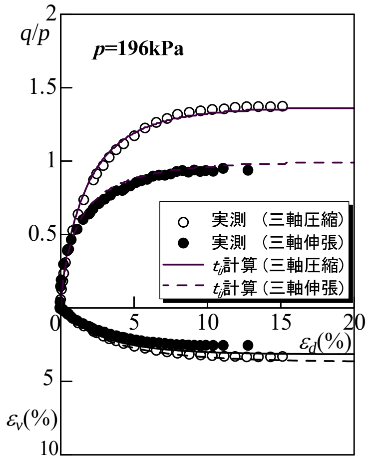
正規圧密土

過圧密土

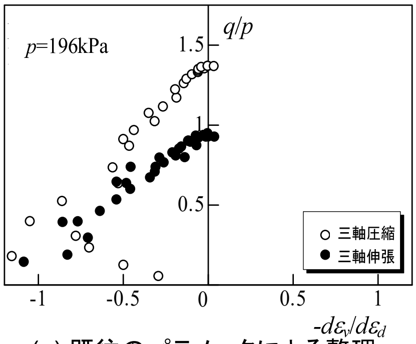
自然堆積土

藤森粘土

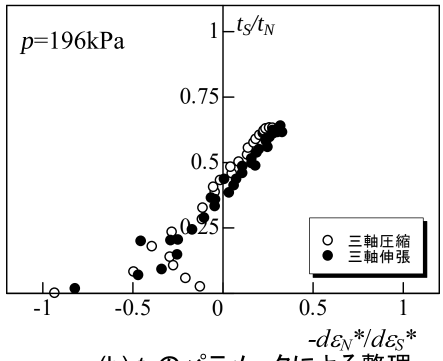
t_{ij}の概念に基づいたモデルによる解析（粘土）



正規圧密粘土の応力･ひずみ関係の実測値と解析結果

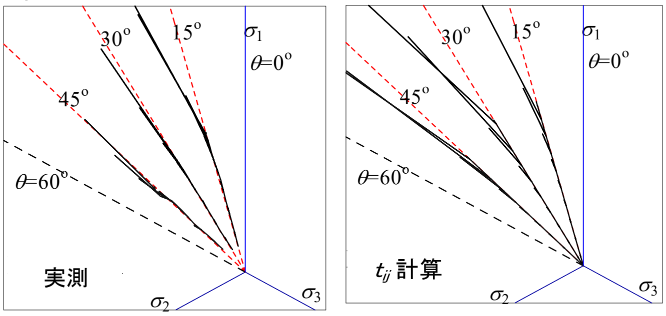


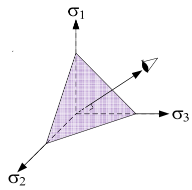
(a) 既往のパラメータによる整理



(b) t_{ij} のパラメータによる整理

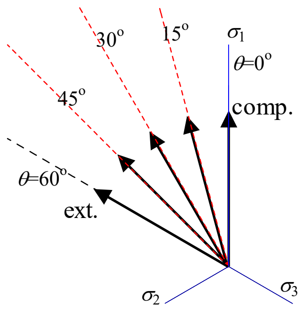
正規圧密粘土の応力比～ひずみ増分比関係



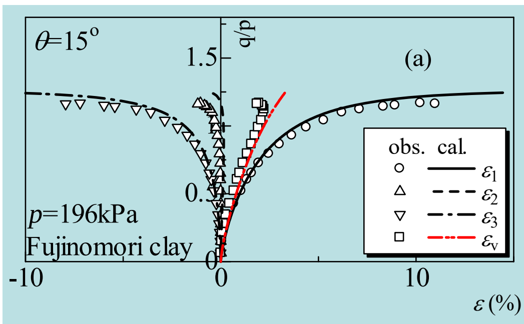


三主応力制御試験の正八面体面上のひずみ増分方向の実測値と解析結果

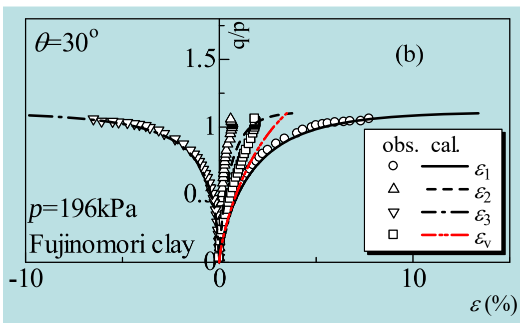
正規圧密粘土の3主応力制御試験



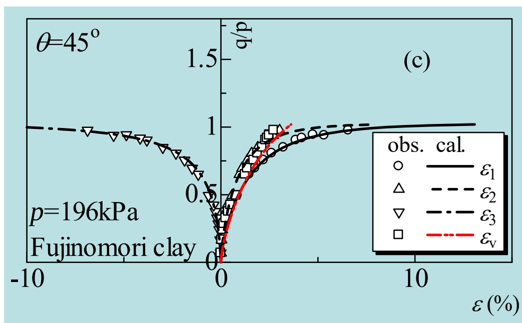
正８面体面状の応力経路



θ=15°

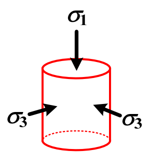


θ=30°

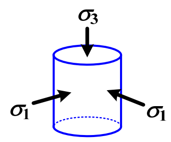


θ=45°

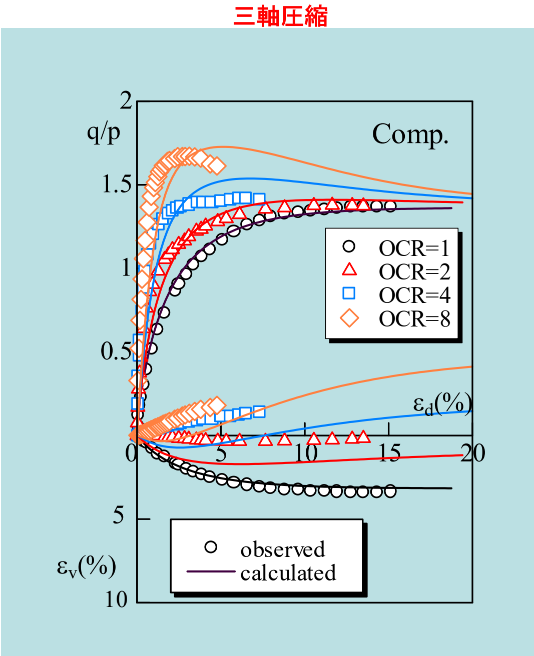
正規および過圧密粘土の三軸圧縮および伸張試験



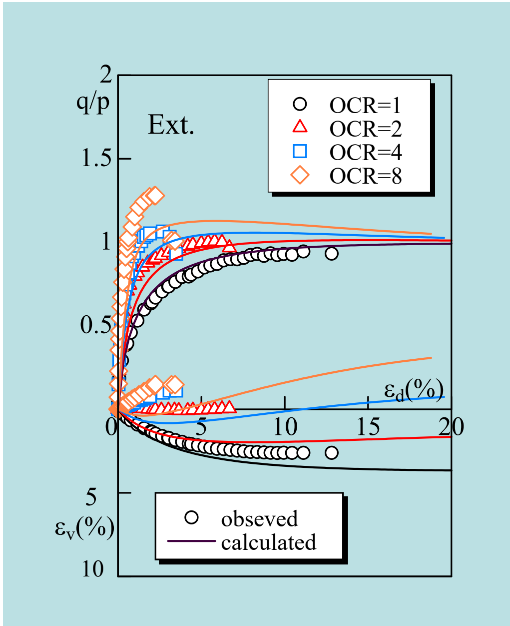
Comp.
三軸圧縮



Ext.
三軸伸張

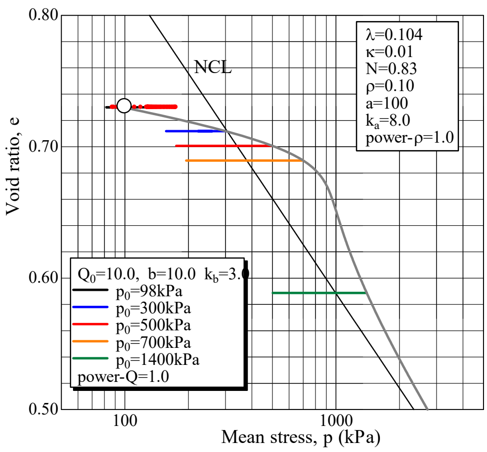


$q/p{:}\varepsilon_d{:}\varepsilon_v$ relation

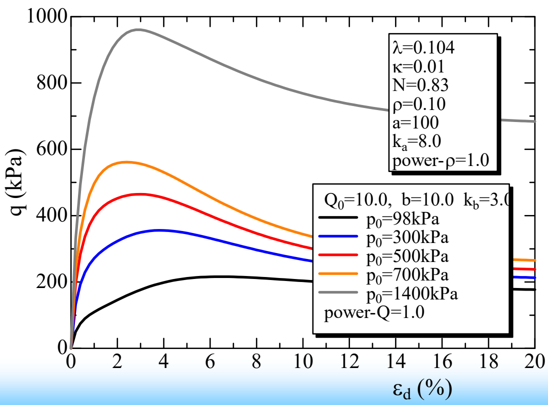


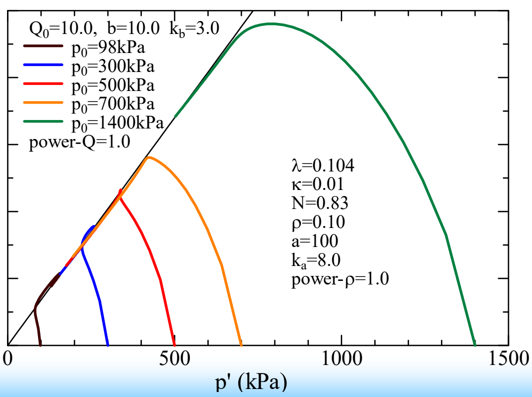
$q/p{:}\varepsilon_d{:}\varepsilon_v$ relation

Structured clayの非排水せん断試験の解析結果



$e_0 = 0.73,\ p_0 = 98kPa,\ Q_0 = 10.0,\ b = 10$
の初期状態から等方圧縮した後の
非排水三軸圧縮試験の解析結果

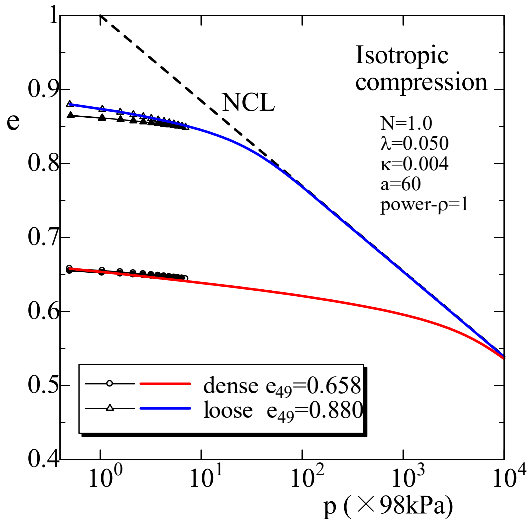




豊浦砂の材料パラメータと等方圧縮試験結果

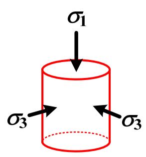
材料パラメータ

λ	0.05	Same parameters as Cam clay model
κ	0.004	
e_{NC} at $p = 98$ kPa & $q = 0$ kPa	1.0	
$R_{cs} = (\sigma_1/\sigma_3)_{cs(comp.)}$	3.2	
ν_e	0.2	
β	1.6	Shape of yield surface (same as original Cam clay at $\beta = 1$)
a	60	Influence of density and confining pressure
k_a	16	

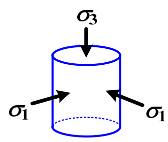


等方圧縮試験結果とシミュレーション

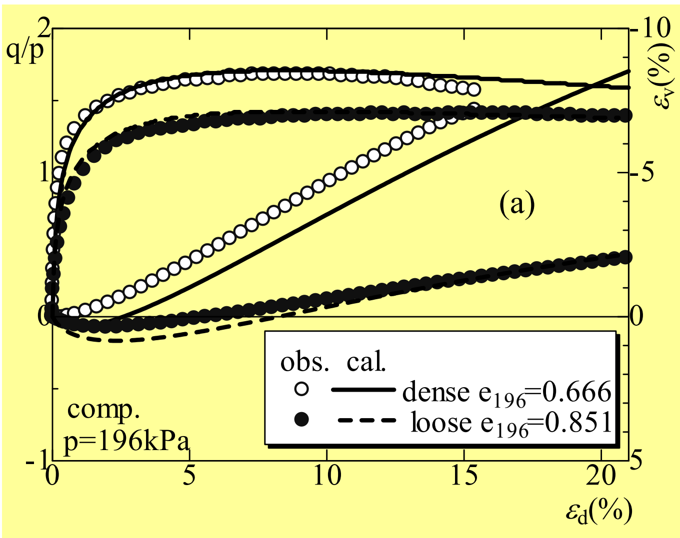
緩い砂および密な砂の三軸圧縮および伸張試験



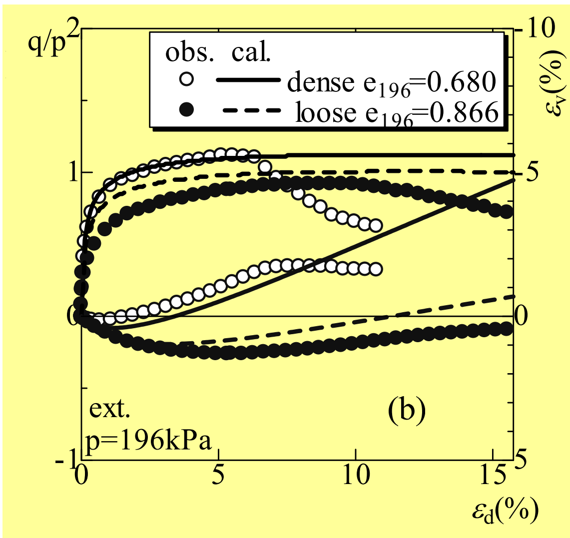
Comp.
三軸圧縮



Ext.
三軸伸張

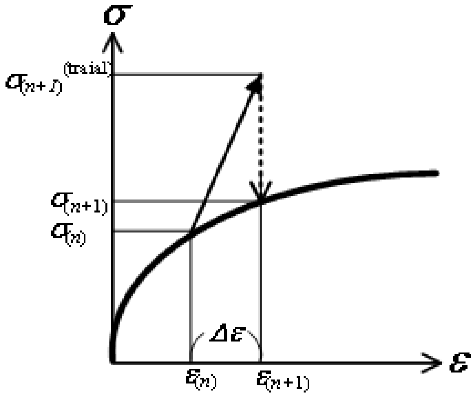


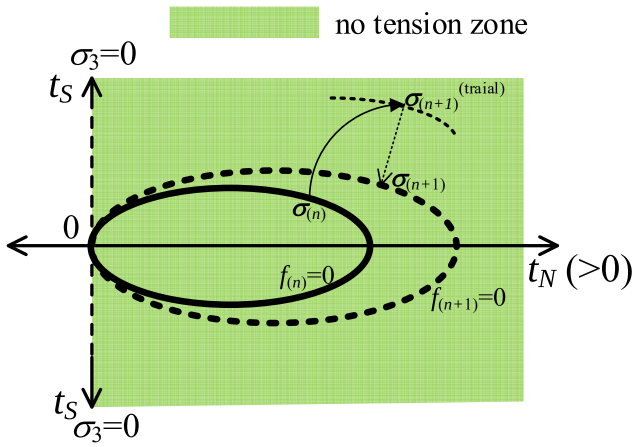
q/p:ε_d:ε_v relation



q/p:ε_d:ε_v relation

Return mappingアルゴリズム





現状態をnとし、その時のひずみおよび応力を$\varepsilon_{(n)}$, $\sigma_{(n)}$とする。この状態から, $\Delta\varepsilon$のひずみ増分を与えた状態を$n+1$とする。Return mappingではまず$\Delta\varepsilon$のひずみ増分はすべて弾性ひずみと仮定し、試行弾性状態の応力$\sigma_{(n+1)}^{(traial)}$を求め、その後$n+1$で降伏関数$f_{(n+1)}=0$を満たす応力状態がなるように解くことになる。

return mappingのアルゴリズム(時間効果特性なし)

下添字の$n+1$を省略して表示

- $$\mathbf{b}_1=\boldsymbol{\varepsilon}^e-(\boldsymbol{\varepsilon}_n^e+\Delta\boldsymbol{\varepsilon})+\Delta\gamma\mathbf{N}-weigt^{(IC)}\cdot L^{(IC)}\ln\frac{t_N}{t_{N,n}}\left(\frac{\mathbf{N}}{\mathrm{tr}\mathbf{N}}-\mathbf{N}^{(IC)}\right)=0$$ ⇐ 流れ則
- $$b_2=\rho-\rho_n-\Delta\gamma\left\{-(1+e_0)\sqrt{3}\,\frac{G/(1+k_aX)+Q/(1+k_bX)}{t_N}\right\}=0$$ ⇐ ρの発展則
- $$b_3=\ln\frac{t_N}{t_{N0}}+\varsigma(X)-\frac{1+e_0}{\lambda-\kappa}\left\{\varepsilon_{v,n}^p+\Delta\gamma\mathrm{tr}\mathbf{N}\right\}-\frac{1}{\lambda-\kappa}(\rho_0-\rho)=0$$ ⇐ 降伏関数

この非線形連立方程式を $\boldsymbol{\varepsilon}^e$, $\Delta\gamma$, ρ を未知数としてニュートン法で解けばよい

where,

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\left(\varepsilon_{11}\ \ \varepsilon_{22}\ \ \varepsilon_{33}\ \ \gamma_{12}\ \ \gamma_{23}\ \ \gamma_{31}\right)^T$$
$$\mathbf{t}=\left(t_{11}\ \ t_{22}\ \ t_{33}\ \ t_{12}\ \ t_{23}\ \ t_{31}\right)^T$$
$$\mathbf{N}=\left(\partial F/\partial t_{11}\ \ \ \partial F/\partial t_{22}\ \ \ \partial F/\partial t_{33}\ \ \ 2\partial F/\partial t_{12}\ \ \ 2\partial F/\partial t_{23}\ \ \ 2\partial F/\partial t_{31}\right)^T$$
$$\mathbf{N}^{(IC)}=\left(1/3\ \ \ 1/3\ \ \ 1/3\ \ \ 0\ \ \ 0\ \ \ 0\right)^T$$
$$F=\ln\frac{t_N}{t_{N0}}+\varsigma(X)$$
$$\mathrm{tr}\mathbf{N}=\mathrm{tr}\left(\partial F/\partial\mathbf{t}\right)=\partial F/\partial t_{11}+\partial F/\partial t_{22}+\partial F/\partial t_{33}$$
$$G=a\rho,\quad Q=b\omega$$
$$L^{(IC)}=\left\langle\frac{\partial F}{\partial t_{kk}}\frac{t_N}{\sqrt{3}}\right\rangle^2\Big/h^{p(IC)}$$

非排水三軸圧縮試験の陽解法および陰解法の解析

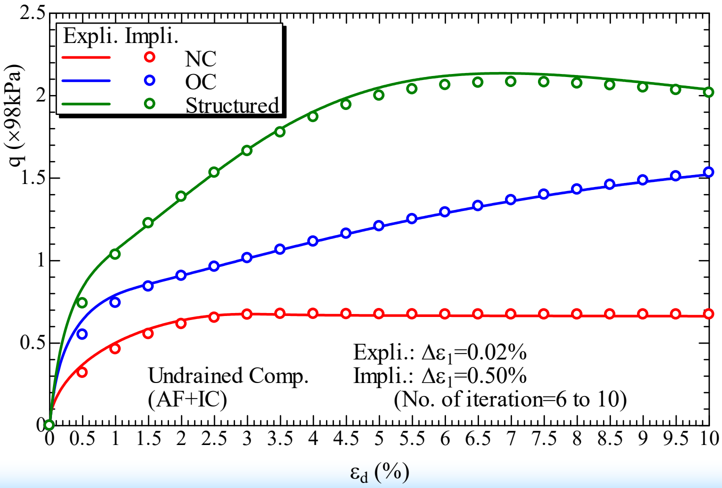
非排水せん断(p_0=98kPa)

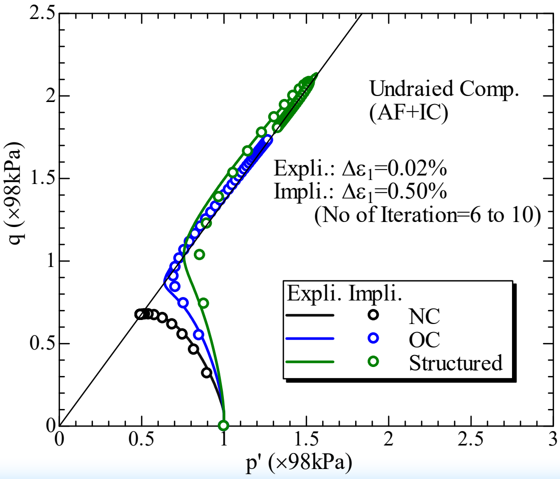
(a) 正規圧密粘土(e_0=0.83)

(b) 過圧密粘土(e_0=0.73)

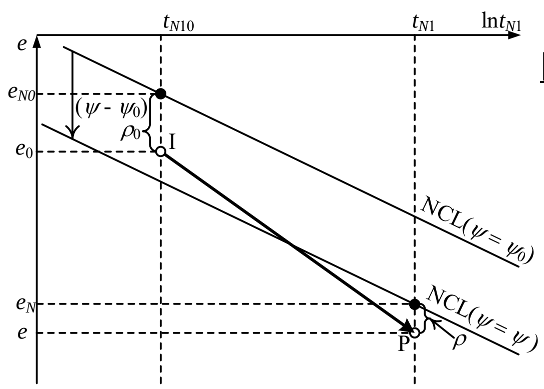
(c) 構造化した粘土(e_0=0.73, Q_0=10.0(ω_0=1.0))

λ	0.104	Same parameters as Cam clay model
κ	0.010	
e_{NC} at $p=98$ kPa & $q=0$ kPa	0.83	
$R_{cs}=(\sigma_1/\sigma_3)_{cs(comp.)}$	3.5	
ν_e	0.2	
β	1.5	Shape of yield surface
a	100	Influence of density and confining pressure
k_a	8	
b	10	Influence of bonding
k_b	3	





時間効果特性を考慮したモデルへの拡張

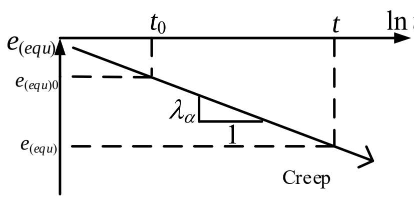


初期状態(I点)および現状態(P点)における間隙比とρ, ψの関係

降伏関数 (NCLのsiftを考慮):

$$
\begin{aligned}
(-\Delta e)^p &= (e_0 - e) - (-\Delta e)^e \\
&= \left\{(e_{N0} - e_N) - (-\Delta e)^e\right\} - (\rho_0 - \rho) \\
&= \left\{(\lambda - \kappa)\ln\frac{t_{N1}}{t_{N0}} + (\psi - \psi_0)\right\} - (\rho_0 - \rho)
\end{aligned}
$$

$$
f = F - H - \frac{1}{\lambda - \kappa}\left\{(\rho_0 - \rho) + \boxed{(\psi_0 - \psi)}\right\} = 0
$$



λ_α: 2次圧密係数

正規圧密土のCreep特性

NCLのsift量と塑性ひずみ速度の関係

$$
\psi - \psi_0 = (-\dot{e})^p_{(equ)0} - (-\dot{e})^p_{(equ)} = \lambda_\alpha \ln(t/t_0)
$$

$$\Downarrow$$

$$
\boxed{\psi - \psi_0 = -\lambda_\alpha \ln\left\{(-\dot{e})^p_{(equ)} \big/ (-\dot{e})^p_{(equ)0}\right\}}
$$

$$
\left(\begin{aligned}
\because\ \psi - \psi_0 &= e_{(equ)0} - e_{(equ)} = \lambda_\alpha \ln(t/t_0) \\
\dot{\psi} &= -\dot{e}_{(equ)} = \lambda_\alpha / t
\end{aligned}\right)
$$

ここに、$(-\dot{e})^p_{(equ)} = \sqrt{3}(1+e_0)\left\|\dot{\varepsilon}^p_{ij}\right\| = \sqrt{3}(1+e_0)\left\|d\varepsilon^p_{ij}\right\|/dt$

(等方圧縮時に$(-\dot{e})^p_{(equ)} = (-\dot{e})^p$となる)

return mappingのアルゴリズム(時間効果特性を考慮)

NCLのsift量は塑性ひずみ速度を使って

$$\psi-\psi_0=-\lambda_\alpha \ln\left\{(-\dot{e})^p_{(equ)}\Big/(-\dot{e})^p_{(equ)0}\right\}$$

と与えられるので、その増分は次式で表現される

$$d\psi=-\lambda_\alpha \frac{1}{(-\dot{e})^p_{(equ)}}d(-\dot{e})^p_{(equ)}$$

上式を参考に、n stepから(n+1) step間のψの変化量$\Delta\psi$(発展則)を次式で与える。

$$\Delta\psi=-\lambda_\alpha\frac{1}{\left((-\dot{e})^p_{(equ),n}+(-\dot{e})^p_{(equ)}\right)\Big/2}\left\{(-\dot{e})^p_{(equ)}-(-\dot{e})^p_{(equ),n}\right\}=-\lambda_\alpha\frac{2(R-1)}{1+R}$$

$$\text{where }\ R=\frac{(-\dot{e})^p_{(equ)}}{(-\dot{e})^p_{(equ),n}}=\frac{\sqrt{3}(1+e_0)\|\mathbf{N}\|\Delta\gamma}{(-\dot{e})^p_{(equ),n}\Delta t}$$

したがって、前述のreturn mapping式に青で囲んだ項を加えるだけで、時間効果を考慮したモデルのreturn mapping式に拡張できる

$$\left[\begin{array}{l}
\bullet\ \mathbf{b}_1=\boldsymbol{\varepsilon}^e-\boldsymbol{\varepsilon}^{e(trial)}_{n+1}+\Delta\gamma\mathbf{N}-L^{(IC)}\ln\dfrac{t_N}{t_{N,n}}\dfrac{\mathbf{N}}{\mathrm{tr}\mathbf{N}}+L^{(IC)}\ln\dfrac{t_N}{t_{N,n}}\mathbf{N}^{(IC)}=0\\
\bullet\ b_2=\rho-\rho_n-\Delta\gamma\left\{-(1+e_0)\sqrt{3}\dfrac{G/(1+k_aX)+Q/(1+k_bX)}{t_N}\right\}+\boxed{\psi-\psi_n-\Delta\psi}=0\\
\bullet\ b_3=\ln\dfrac{t_N}{t_{N0}}+\varsigma(X)-\dfrac{1+e_0}{\lambda-\kappa}\left\{\varepsilon^p_{v,n}+\Delta\gamma\mathrm{tr}\mathbf{N}\right\}-\dfrac{1}{\lambda-\kappa}\left\{(\rho_0-\rho)+\boxed{(\psi_0-\psi)}\right\}=0
\end{array}\right.$$

等方圧縮時の時間効果特性の解析(正規圧密土)

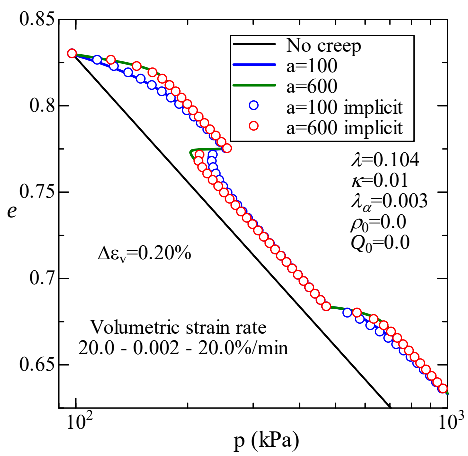
正規圧密粘土の定ひずみ圧縮試験およびクリープ試験の解析

時間効果特性に関する材料パラメータ

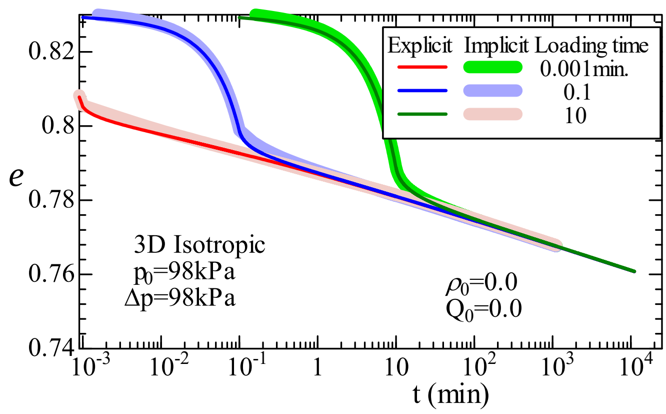
２次圧密係数 $\lambda_\alpha=0.003$

初期条件(換算間隙比の塑性変化速度)

$(-\dot{e})^p_{(equ)0}=(-\dot{e})^p_{(equ)ref}=1\times10^{-7}\ \%/\mathrm{min}$



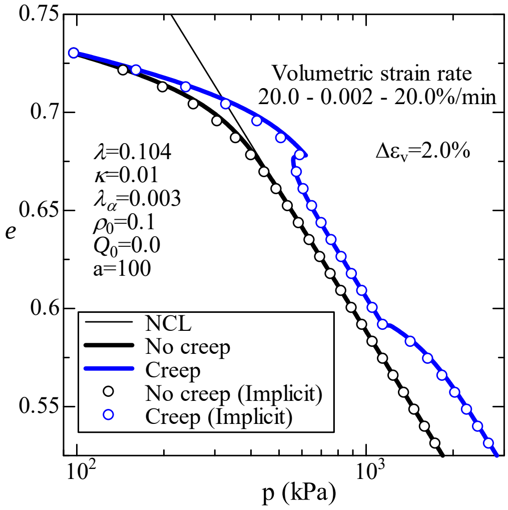
ひずみ速度を変えた定ひずみ速度試験



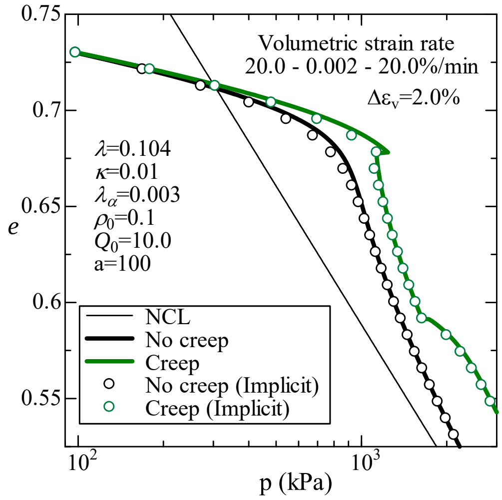
等方圧縮後のクリープ試験

等方圧縮時の時間効果特性の解析(過圧密土、自然堆積土)

ひずみ速度を変えた定ひずみ速度試験



過圧密土



自然堆積土

せん断時の時間効果特性の解析(正規圧密土)

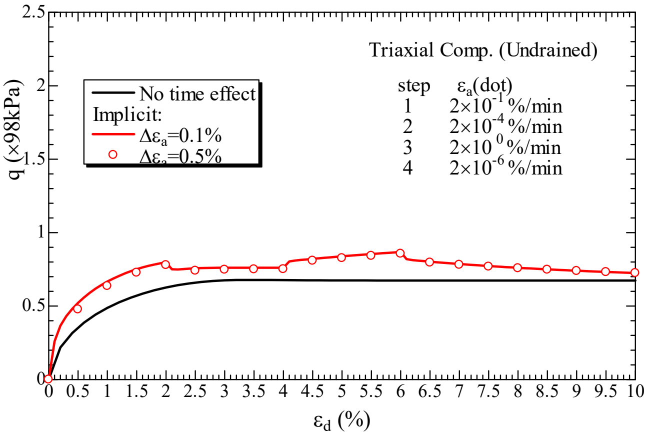
ひずみ速度を段階的に変えた非排水三軸圧縮試験の解析

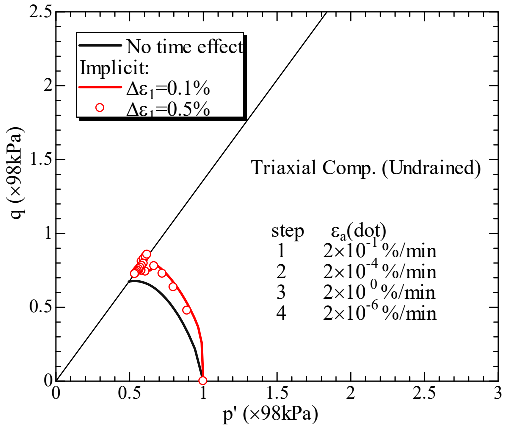
時間効果特性に関する材料パラメータ

2次圧密係数 $\lambda_\alpha = 0.003$

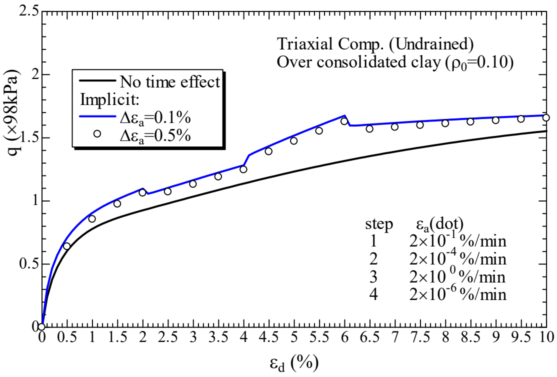
初期条件(換算間隙比の塑性変化速度)

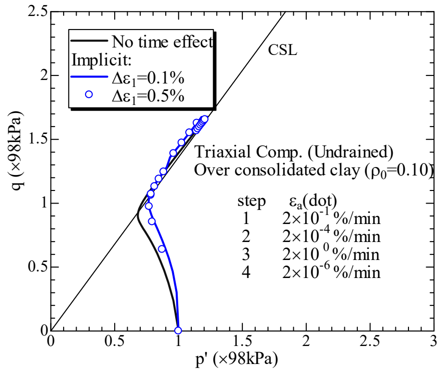
$$(-\dot{e})^{p}_{(equ)0} = (-\dot{e})^{p}_{(equ)ref} = 1\times10^{-7}\ \%/\mathrm{min}$$



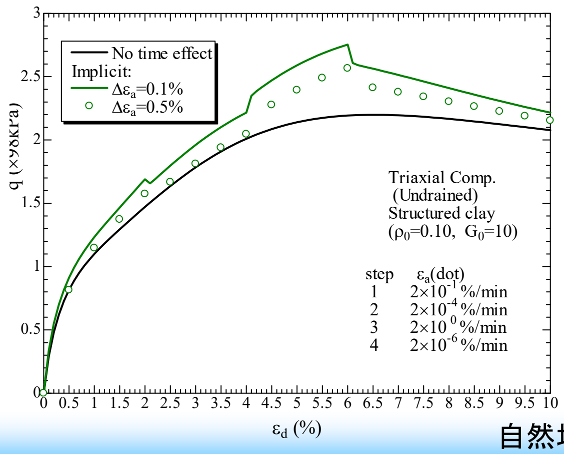


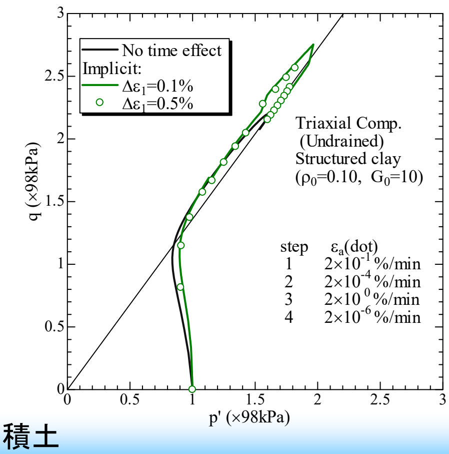
せん断時の時間効果特性の解析（過圧密土、自然堆積土）





過圧密土





自然堆積土

t_{ij} の概念の意味

地盤工学会誌 Vol.66, No. 7,pp18-21, 2018
「巨視的及び微視的観点から見たt_{ij}の概念の意義」

微視的観点からみたt_{ij}の意味

- Satake(1984)による構造テンソルの主値と応力比の関係

$$\varphi_1/\varphi_2 \approx (\sigma_1/\sigma_2)^{0.5}$$

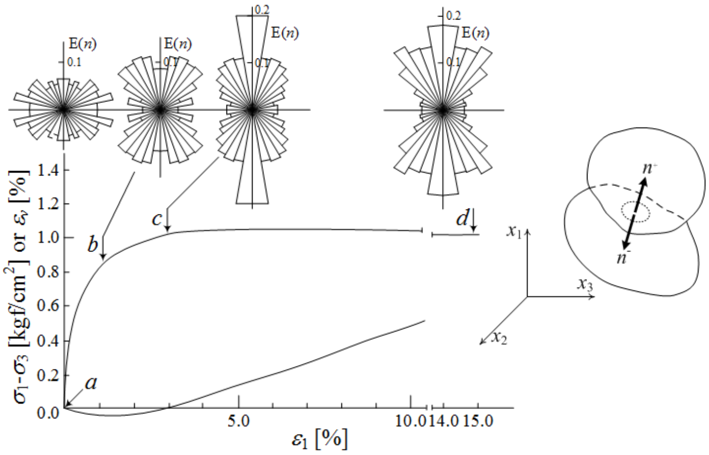
- Satake(1982)による修正応力

$$\sigma_{ij}^* = (1/3)\varphi_{ik}^{-1}\sigma_{kj}$$

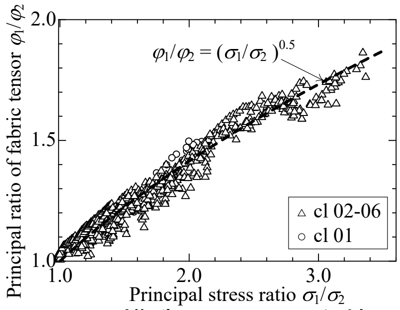
- 修正応力t_{ij}(Nakai & Mihara, 1984)

$$t_{ij} = a_{ik}\sigma_{kj}$$

$$(a_1, a_2, a_3) = \left(\sqrt{\frac{I_3}{I_2\sigma_1}}, \sqrt{\frac{I_3}{I_2\sigma_2}}, \sqrt{\frac{I_3}{I_2\sigma_3}}\right)$$



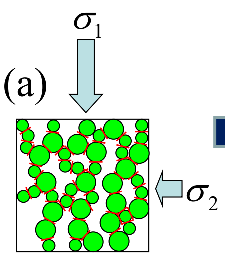
応力･ひずみ関係と粒子接平面の法線頻度分布
(Oda, 1972; 1993)



DEMによる構造テンソルの主値の変化
(Maeda et.al., 2006)

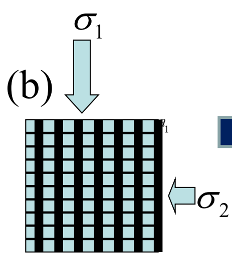
t_{ij}の概念に基づく塑性論と通常の塑性論

土のような
粒状体



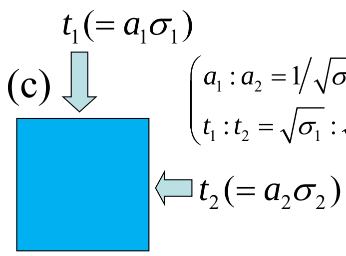
最大主応力σ_1方向に
配列する粒子が増える

異方的な連続
体とみなす



最大主応力σ_1
方向に硬い

等価な等方性
連続体とみる

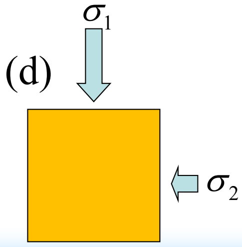


$\left(a_1 : a_2 = 1/\sqrt{\sigma_1} : 1/\sqrt{\sigma_2}$なので
$t_1 : t_2 = \sqrt{\sigma_1} : \sqrt{\sigma_2}$となる$\right)$

修正応力(t_1, t_2)
の導入

t_{ij}の考え方

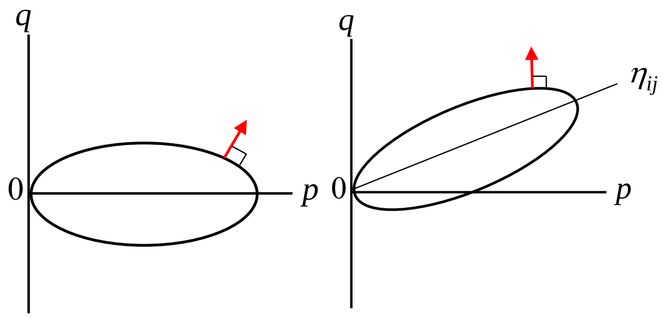
そのまま等方性
連続体とする



従来の考え方

粒状体の挙動を物理的意味
が明確な修正応力t_{ij}を用いて
説明する塑性論の展開

t_{ij}の概念における流れ則（直交則）の意味

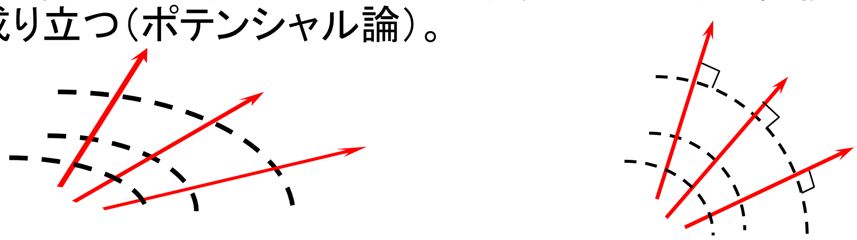


等方硬化モデルはもちろんのこと、降伏関数を傾ける回転硬化モデル（左図）でも直行則を仮定して塑性ひずみ増分方向を決めている。

⇓

これは正しいか？

例えば、異方性地盤の透水問題では流れの方向は物理空間の等ポテンシャル面に直交せず、等方的な透水係数になるように変換した空間で直行則が成り立つ（ポテンシャル論）。



物理空間　　　　変換空間

t_{ij}の考え方は応力（応力比）誘導異方性を有する材料を、等価な等方性を有する材料に置き換えることを意味する。そのような意味において、σ_{ij}空間ではなくt_{ij} 空間で直行則を考えるのが妥当だと言える.

参考文献

1) Maeda K. Hirabayashi H. and Ohmura A. (2006): Micromechanical influence of grain properties on deformation – failure behaviors of granular media by DEM. *Proc. of Geomechnics and Geotechnics of Particulate Media*, Yamaguchi, 173-179.
2) Matsuoka H. and Nakai T. (1974): Stress-deformation and strength characteristics of soil under three different principal stresses, *Proc. of JSCE*, **232**, 59-70.
3) Murayama S. (1964): A theoretical consideration on a behavior of sand, *Proc. of IUTAM Symposium on Rheology and Soil Mechanics*, Grenoble, 146-159.
4) 中井照夫,・松岡元 (1980): ３主応力下の土のせん断挙動に関する統一的解釈, *土木学会論文報告集*, 301, 65-77.
5) Nakai T. and Mihara Y. (1984): A new mechanical quantity for soils and its application to elastoplastic constitutive models, *Soils and Foundations*, **24**(2), 82-94.
6) Nakai, T. and Hinokio, T. (2004): A simple elastoplastic model for normally and over consolidated soils with unified material parameters, *Soils and Foundations*, **44**(2), 53-70.
7) Nakai T., Shahin H.M., Kikumoto M., Kyokawa H., Zhang F. and Farias, M.M. (2011a): A simple and unified one-dimensional model to describe various characteristics of soils, *Soils and Foundations*, **51**(6), 1129-1148.
8) Nakai T., Shahin H.M., Kikumoto M., Kyokawa H., Zhang F. and Farias, M.M. (2011b): A simple and unified three-dimensional model to describe various characteristics of soils, *Soils and Foundations*, **51**(6), 1149-1168
9) Nakai, T. (2012): *Constitutive Modeling of Geomaterials*: *Principles and Applications*, CRC Press
10) 中井照夫 (2011): 地盤材料の構成モデル最前線 – 2.弾塑性論の解説とカムクレイモデルの適用性, *地盤工学会誌*, 講座, **59**(4), 47-55
11) 中井照夫 (2011): 地盤材料の構成モデル最前線 – 7.3主応力条件下での材料特性のモデル化, *地盤工学会誌*, 講座, **59**(9), 66-75.
12) 中井照夫 (2018): 巨視的および微視的観点から見たtijの概念の意義, *地盤工学会誌*, **66**(7). 18-21.
13) Oda M. (1972): The mechanism of fabric changes during compressional deformation of sand, *Soils and Foundations*, **12**(2), 1-18.
14) Satake M. (1982): Fabric tensor in granular materials. *Proc. of IUTAM Conference on Deformation and Failure of Granular Materials*, Delft, 63-68
15) 佐武正雄 (1984): 地盤と土の異方性, *土と基礎*, **32**(11), 5-12.